1 | Kastenwesen

Welche Matrizen stellen die folgenden linearen Abbildungen f, g, h und ihre Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$ und $h \circ g \circ f$ dar?

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ 3x+2y-z \\ z+7x \end{pmatrix}$$

$$g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z-3w \\ y-3w \end{pmatrix}$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$f: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1{,}5 \qquad g: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1{,}5 \qquad h: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 1{,}5$$

$g \circ f$: OPTION A:

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ 3x+2y-z \\ z+7x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z+7x-3(x-y) \\ 3x+2y-z-3(x-y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x+3y+z \\ 5y-z \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Matrix zu $g \circ f$ ist $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

OPTION B:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2

$h \circ g$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1,5

In dieser Aufgabe ausnahmsweise volle Punktzahl für richtige Ergebnisse.

Jeweils −0,5 P für falschen Eintrag.

2 | **Großes ABC**

Welche der durch die folgenden Matrizen definierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sind injektiv? Welche surjektiv?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Injektivität: 2,5

1P

1P

Keine der Abbildungen ist injektiv denn nach dem Rangsatz und dem Injektivitätskriterium gibt es keine injektiven linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

(Für lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\operatorname{rk} f + \dim(\ker f) = 4$$

und $\operatorname{rk} f \leq 3$,

also $\dim(\ker f) \geq 1$.)

(Alternativ:

1 Punkt für jede Abbildung, für die Nicht-Injektivität korrekt gezeigt wurde, aber höchstens 2,5 Punkte.)

f_A surjektiv (2,5)

Option K: Bestimme Kern!

Sei $f_A\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} 2y - z &=& 0 \quad | :\tfrac{1}{2} \\ w + 3x + y + 2z &=& 0 \\ x + y - z &=& 0 \end{array} \quad \Big] -3$$

$$\begin{array}{rcl} y - \tfrac{1}{2}z &=& 0 \\ w \quad -2y + 5z &=& 0 \\ x + y - z &=& 0 \end{array} \quad \Big] +2 \quad \Big] -1$$

$$\begin{array}{rcl} y - \tfrac{1}{2}z &=& 0 \\ w \quad + 4z &=& 0 \\ x \quad -\tfrac{1}{2}z &=& 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot z \\ 1/2 \cdot z \\ 1/2 \cdot z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \ker(f_A) = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, insbesondere

$\dim \ker(f_A) = 1$.

Nach Rangformel folgt:

$rk(f_A) = 3$, also f_A surjektiv.

Option D: Direktes Nachrechnen.

Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Ansatz: $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2y - z &= a \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \\ w + 3x + y + 2z &= b \quad -3 \\ x + y - z &= c \\ \hline y - \tfrac{1}{2}z &= \tfrac{1}{2}a \\ w \qquad -2y + 5z &= b - 3c \quad +2 \quad -1 \\ x + y - z &= c \\ \hline y - \tfrac{1}{2}z &= \tfrac{1}{2}a \\ w \qquad +4z &= a + b - 3c \\ x \qquad -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{1}{2}a + c \\ \hline \end{aligned}$$

Wähle nun z.B. $z = 2$ und löse nach w, x, y auf. Ergebnis:

$$f_A\begin{pmatrix} a + b - 3c - 8 \\ -\tfrac{1}{2}a + c + 1 \\ \tfrac{1}{2}a + 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Option 2: Rang bestimmen mit Rezept 6.27

NEU

(Das gibt keine Punkte für das Blatt, da Rezept 6.27 zum Zeitpunkt der Bearbeitung noch nicht bekannt war, aber es gäbe Punkte in der Klausur)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{Rang}(f_A) = \operatorname{Rang}(A) = 3.$

Also ist f_A surjektiv.

f_B nicht surjektiv (2,5)

(Ich diskutiere hier nur Option B.)

Sei $f_B\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} -2x + y - 2z &=& a \\ -2w + x + z &=& b \quad \left|\, -1 \right. \\ -2w - x + y - z &=& c \quad \big]+ \\ \hline -2x + y - 2z &=& a \quad \left|\, -1 \right. \\ 2w - x - z &=& -b \\ -2x + y - 2z &=& -b + c \quad \big]+ \\ \hline 2x - y + 2z &=& -a \\ 2w - x - z &=& -b \\ \boxed{0 = -a - b + c} && \end{array}$$

Das zeigt: Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $-a-b+c \neq 0$ liegen nicht im Bild von f_B. Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{im}(f_B)$.

f_c surjektiv (2,5) (Hier Option B)

Sei $f_c\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl}
2w + x \qquad\quad + z &=& a \\
x + 2y + z &=& b \\
w \qquad\quad + 2y \qquad &=& c
\end{array} \qquad -1 \qquad -2$$

$$\begin{array}{rcl}
-6y &=& a - b - 2c \\
x + 2y + z &=& b \\
w \qquad + 2y &=& c
\end{array} \qquad \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot 3 \\ \mid \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
6y &=& -a + b + 2c \\
3x + 6y + 3z &=& 3b \\
3w \qquad + 6y &=& 3c
\end{array} \qquad -1 \qquad -1$$

$$\begin{array}{rcl}
6y &=& -a + b + 2c \\
3x \qquad + 3z &=& a + 2b - 2c \\
3w &=& a - b + c
\end{array}$$

Wähle z.B. $z = 0$ und löse nach w, x, y auf:

$$f_c\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a - b + c) \\ \frac{1}{3}(a + 2b - 2c) \\ \frac{1}{6}(-a + b + 2c) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Für A & C lässt sich das Ergebnis leicht überprüfen. Daher kommt es hier mehr auf das Endergebnis als auf die Rechnung (= Ansatz) an.

Für B muss eine Rechnung abgegeben werden.

Je −0,5 Punkte pro Rechenfehler.

⚠ Die Studierenden kennen noch kein Gaußverfahren aus der Vorlesung. Alle Äquivalenzumformungen sind zulässig.